I.G Surjectivité de l'exponentielle matricielle

Théorème 15:

L'exponentielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration.

1. Commençons par montrer que pour toute matrice U unipotente, il existe N une matrice nilpotente, qui s'exprime comme un polynôme en U, telle que $\exp(N) = U$.
   Soit U unipotente, la matrice $U - I_n$ est nilpotente (cela se voit facilement en trigonalisant U) et on pose :
   $$N = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (U - I_n)^k$$
   qui est une matrice nilpotente comme somme de matrices nilpotentes qui commutent (on s'inspire du DSE de la fonction logarithme au voisinage de 1 pour écrire N). A ce stade, on a que N est un polynôme en U, vérifions donc maintenant que $U = \exp(N)$
   On pose ensuite
   $$A(t) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-t)^k}{k} (U - I_n)^k\right) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^{k+1}}{k+1} (U - I_n)^{k+1}\right).$$
   De sorte que l'on ait $A(1) = N$. On s'est permis de modifier A pour faciliter les calculs au moment de dériver tout en conservant l'identité précédente.
   Alors :
   $$A'(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k (U - I_n)^k\right) \cdot (U - I_n) \cdot A(t) = (I_n + t(U - I_n))^{-1} \cdot (U - I_n) \cdot A(t)$$
   Donc $A(t)$ est solution du système différentiel
   $$\begin{cases} Y'(t) = Y(t) \cdot (U - I_n) \cdot (I_n + t(U - I_n))^{-1} \\ Y(0) = I_n \end{cases}$$
   D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a une unique solution définie sur $\mathbb{R}^+$. Or, l'application $t \mapsto I_n + t(U - I_n)$ est également solution. On en déduit donc que les deux solutions sont égales, en particulier $\exp(N) = A(1) = U$ avec N un polynôme en U.
2. Montrons maintenant la surjectivité de l'exponentielle.
   Tout d'abord, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a les égalité $\exp(M) \cdot \exp(-M) = \exp(M + (-M)) = \exp(0_n) = I_n$ car M et $-M$ commutent. On en déduit $\exp(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et donc
   $$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
   Réciproquement, soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la décomposition de Dunford, nous donne N nilpotente et D diagonalisable, les matrices N et D étant des polynômes en M, et telles que $M = D + N$. En posant $U = M \cdot D^{-1} = N \cdot D^{-1} + I_n$, qui est unipotente, on obtient que $M = U \cdot D$. De plus, la matrice U est un polynôme en M, car D^{-1} est un polynôme en D. En effet, $\mathbb{C}[D]$ est fermé comme espace vectoriel de dimension fini et
   $$D^{-1} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (D - I_n)^k.$$
   D'après ce qui précède, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(U)$ soit nilpotente et $\exp(Q(U)) = U$.

D'autre part comme D est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et des λ_i distincts et tous non nuls tels que $D = P \cdot \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) \cdot P^{-1}$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit α_i tel que $\lambda_i = \exp(\alpha_i)$, et soit $R \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall i \in \{1, \dots, r\}, R(\lambda_i) = \alpha_i$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\exp(R(D)) &= \exp\left(R\left(P \cdot \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) \cdot P^{-1}\right)\right) \\
&= P \cdot \exp(R(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r))) \cdot P^{-1} \\
&= P \cdot \exp(\mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_r)) \cdot P^{-1} \\
&= P \cdot \mathrm{Diag}(\exp(\alpha_1), \dots, \exp(\alpha_1), \dots, \exp(\alpha_r), \dots, \exp(\alpha_r)) \cdot P^{-1} \\
&= P \cdot \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) \cdot P^{-1} = D
\end{aligned}$$

Finalement, si l'on pose $A = Q(U) + R(D)$, comme U et D sont des polynômes en M, les endomorphismes $Q(U)$ et $R(D)$ commutent et A est un polynôme en M vérifiant

$$\exp(A) = \exp(Q(U)) \cdot \exp(R(D)) = U \cdot D = M$$

$\blacksquare$

Remarque 16

On sait que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \neq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)) > 0$, donc toute matrice de déterminant strictement négatif n'a pas d'antécédent par l'exponentielle.
On montre que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{M^2, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.
En effet, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\exp(M) = \exp\left(\frac{1}{2}M\right)^2 \in \left\{M^2, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.
Réciproquement, soit $M \in \left\{M^2, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$ et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = B^2$.
D'après ce qui précède, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(B)) = B$ et on a les égalités $\exp\left(\bar{Q}(B)\right) = \exp\left(\bar{Q}(\bar{B})\right) = \exp\left(\overline{Q(B)}\right) = \overline{\exp(Q(B))} = \bar{B} = B$.
D'où $\exp\left(\left(Q + \bar{Q}\right)(B)\right) = B^2 = M$ avec $\left(Q + \bar{Q}\right) \in \mathbb{R}[X]$, et donc $\left(Q + \bar{Q}\right)(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'exponentielle n'est injective ni sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P$$

et

$$\exp\left(2\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = P^{-1} \cdot \exp\left(2\pi \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right) \cdot P = P^{-1} \cdot I_n \cdot P = I_n = \exp(0_n)$$